構造物の剪断振動について（I）

On the Shearing Vibrations of a Structure (I)

林　五　郎 Goro Hayashi)

ABSTRACT— In this paper we consider the shearing vibration of a structure, with damping proportional to the velocity of vibration and internal friction of the materials. To solve the boundary value problem of this type, it is convenients to use the method of Laplace transformation. The foundamental partial differentials equation and its boundary and initial conditions are as follows:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\ ;$$

$x=l,\ \left\{\mu+\xi\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial y}{\partial x}=0$: There is no shearing stress at the top,

$x=0,\ t>0,\ y=f(t)$; $t<0,\ y=0$: The foundation follows the motion of the earthquake, $f(t)$ is an arbitrary function of t.

$t\leqq 0,\ 0\leqq x\leqq l,\ y=0$; There has been no vibration until an

$t\leqq 0,\ 0<x\leqq l,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0$: earthquake begins.

$t<0\quad x=0,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0$

---

1. 緒論　本論文は媒質の抵抗及び材料の内部摩擦を考慮した時の構造物（架構）の剪断振動の基礎理論を述べたものである。減衰を含まないこのような研究は既に多くの学者によって研究されている。構造物の振動をこのような形に於いて論ずることは必ずしも適当ではあると思えないが，既に末広博士によって指摘されているように構造物を架構と考えて差支えない場合も可成り多く，且つ又剪断振動が横振動に較べて優勢である場合も相当に多いのである。本論文の基礎微分方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

である。こゝに y は水平方向の剪断変位で，x は縦方向の座標である。基盤を $x=0$ に、構造物の高さを $x=l$ とする。μ は剛性率(剪断率)，ξ は材料の内部摩擦係数，η は媒質の粘性減衰で，ρ は密度である。我々の問題とする境界及び初期条件は次の如くである。

$$x=l,\ \left(\mu+\xi\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial x}=0 \quad \text{：上端には剪断応力はない。} \qquad (2)$$

$$x=0,\ t>0,\ y=f(t);\ t<0,\ y=0 \quad \text{：基盤は地震動 } f(t) \text{ を受ける。}$$

$$t\leqq 0,\ 0\leqq x\leqq l,\ y=0$$

$$t\leqq 0,\ 0<x\leqq l,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0 \quad \text{：地震が起るまでは振動しない。} \qquad (3)$$

$$t<0,\ x=0,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=0$$

(2),(3) なる境界及び初期條件の下に (1) を解くことが当面の問題である。

2．構造物の剪断振動一般論．　上述の問題を解くために Laplace 変換法を用いる。従って

$$\mathcal{L}\{y(x,t)\}=p\int_0^\infty e^{-pt}y(x,t)\,dt=Y(x,p)$$

初期條件 (3) より

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\}=p^2Y,\qquad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\}=pY.$$

故に (1) に Laplace 変換を施して

$$\left(\frac{\mu}{\rho}+\xi p\right)Y''-(p^2+\eta p)\,Y=0 \qquad (4)$$

これの一般解は

$$Y=Ae^{rx}+Be^{-rx} \qquad (5)$$

こゝに

$$r=\sqrt{\frac{p^2+\eta p}{\frac{\mu}{\rho}+\xi p}} \qquad (6)$$

任意定義 A 及び B を決定するために (2) を用いると (2) より

$$x=l,\ \frac{dY}{dx}=0;\qquad x=0,\quad Y=F(p).$$

こゝに

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt=F(p)$$

である。これより

$$Y=F(p)\frac{e^{\gamma(l-x)}+e^{-\gamma(l-x)}}{e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}}=F(p)\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}$$

これが演算子解であるから Laplace の逆定理によって

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}\frac{e^{pt}}{p}\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}F(p)\,dp \quad \cdots\cdots (7)$$

又は

$$\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}=\frac{F_2(p)}{p}$$

とおけば

$$Y=F(p)F_2(p)/p$$

であるから Borel の定理より

$$y(x,t)=\int_0^t f(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

が解である。こゝに

$$f_2(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}\frac{e^{pt}}{p}F_2(p)\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}e^{pt}\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}\,dp. \quad \cdots (9)$$

(7) 又は (8) が理論的な結果であるがもっと精しく論じて見よう。

先ず $\cosh(\gamma l)=0$ ………………………… (10)

が自由振動の振動数方程式である。さて γ は (6) によって与えられ p の函数であるから (10) を p について解けば減衰係数及び振動数が得られる。(10) なる γl は $\gamma l=-i(n+\frac{1}{2})\pi$

であるからこれより (6) によって p を求めれば

$$p=-\frac{\eta l^2+\xi(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{2l^2}\pm i\sqrt{\frac{\frac{\mu}{\rho}(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}-\frac{\{\eta l^2+\xi(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\}^2}{4l^4}}$$

$$=p_n\pm iq_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

である。この p_n 及び q_n がそれぞれ減衰係数及び自由振動数である。こゝで特に注意すべきことは振動数は η, l に関係し，しかも ξ については振動の次数の平方に比例することである。元来 η は微小と考えられるから問題はないのであるが ξ については注目すべきである。

次ぎに(8)及び(9)に就いて考えよう。(9)より

$$f_2(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1} e^{pt}\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}dp$$

を計算するには $\cosh(\gamma l)=0$ に於ける留数の和を考えればよい。そうすると，

$$f_2(x,t)=\sum \mathrm{Res.}=-\frac{2}{l}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-p_n t}\left\{e^{iq_n t}\left[\frac{\sinh(\gamma x)}{\gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma^2)'}\right]_{p=-p_n+iq_n}\right.$$

$$\left.+e^{-iq_n t}\left[\frac{\sinh(\gamma x)}{\gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma^2)'}\right]_{p=-p_n-iq_n}\right\}.$$

こゝに $'$ は p についての微分を示す。

今

$$[\gamma]_{p=-p_n+iq_n}=a_n+ib_n \qquad \text{----------} \quad (12)$$

$$\left[\gamma^{-\frac{1}{2}}(\gamma^2)'\right]_{p=-p_n+iq_n}=c_n+id_n$$

と置いて計算すれば

$$f_2(x,t)=\sum \mathrm{Res.}=-\frac{4}{l}\sum e^{-p_n t}\sqrt{\frac{\cosh^2(a_n x)-\cos^2(b_n x)}{c_n^2+d_n^2}}\sin(q_n t+\varphi)$$

従って，

$$y(x,t)=-\frac{4}{l}\sum\sqrt{\frac{\cosh^2(a_n x)-\cos^2(b_n x)}{c_n^2+d_n^2}}\int_0^t e^{-p_n(t-\tau)}\sin\{q_n(t-\tau)+\varphi\}f(\tau)d\tau$$

$$\text{-------} \quad (13)$$

こゝに

$$\tan\varphi=\frac{c_n\cos b_n x\sinh a_n x+d_n\sin b_n x\cosh a_n x}{d_n\cos b_n x\sinh a_n x-c_n\sin b_n x\cosh a_n x} \qquad \text{----} \quad (14)$$

である。

3．$f(t)=A\sin\omega t$ なる時の振動．　(7)より

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}\frac{e^{pt}}{p}\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}F(p)\,dp. \qquad \text{------} \quad (7)$$

これに於いて　$f(t)=A\sin\omega t$，

従って　$F(p)=A\dfrac{p\omega}{p^2+\omega^2}$

とすれば

$$y(x,t)=\frac{A\omega}{2\pi i}\int_{Br_1}e^{pt}\frac{1}{p^2+\omega^2}\frac{\cosh\{\gamma(l-x)\}}{\cosh(\gamma l)}dp \qquad \text{-------} \quad (15)$$

先づ定常強制振動を考えるために $p=\pm i\omega$ に於ける留数を計算する。そうすると、今この定常強制振動を $y_1(x,t)$ として

$$y_1(x,t)=A\left\{\frac{e^{i\omega t}}{2i}\left[\frac{-\cosh\{r(l-x)\}}{\cosh(rl)}\right]_{p=i\omega}-\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\left[\frac{\cosh\{r(l-x)\}}{\cosh(rl)}\right]_{p=-i\omega}\right.$$

故に

$$[r]_{p=i\omega}=a+bi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

と置けば結局

$$y_1(x,t)=A\sqrt{\frac{\cos^2\{b(l-x)\}+\sinh^2\{a(l-x)\}}{\cos^2 bl+\sinh^2 al}}\,\sin(\omega t+\psi) \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

が得られる。こゝに

$$\tan\psi=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\gamma+\beta\delta}$$

$$\alpha=\cos bl\cosh al,\qquad \gamma=\cos\{b(l-x)\}\cosh\{a(l-x)\},$$
$$\beta=\sin bl\sinh al,\qquad \delta=\sin\{b(l-x)\}\sinh\{a(l-x)\}.$$

これより明らかに強制振動と自由振動の振動数が等しい時に共振が起る事は明らかである。

さてこの強制振動に伴う自由振動は (15) に於いて $\cosh(rl)=0$ ならしめる値即ち前節の $p=-p_n+iq_n$ に於ける留数の和を計算して得られる。今それを $y_2(x,t)$ とすれば

$$y_2(x,t)=-\frac{4A\omega}{l}\sum e^{-p_nt}\sqrt{\frac{\cosh^2(a_nx)-\cos^2(b_nx)}{\gamma_n^2+\mu_n^2}}\,\sin(q_nt+\varphi') \quad (18)$$

こゝに

$$\begin{aligned}\gamma_n&=c_n(p_n^2-q_n^2+\omega^2)+2p_nq_nd_n\\ \mu_n&=d_n(p_n^2-q_n^2+\omega^2)-2p_nq_nc_n\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

$$\tan\varphi=\frac{\gamma_n\cos b_nx\sinh a_nx+\mu_n\sin b_nx\cosh a_nx}{\mu_n\cos b_nx\sinh a_nx-\gamma_n\sin b_nx\cosh a_nx}$$

斯くして (17) 及び (19) より $y(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)$ が得られ我々の問題が解けたことになる。

4. 結び。 以上で一応問題は解けるわけであるが具体的な計算はなお相当困難である。実際的には $\eta\doteqdot 0$ を仮定してもよい。先づこの仮定の下に定数 a, b; a_n, b_n, c_n, d_n を計算する。尚 $f(t)$ に種々の形を代入しての計算、その他の数値計算は次の機会にゆずる。又最大応力のかゝる点の決定等についても後に述べる。