Title	構造物の剪断振動について(II)
Author(s)	林, 五郎
Citation	茨城大学工学部研究集報(2(1)): 58-64
Issue Date	1949-09
URL	http://hdl.handle.net/10109/7403
Rights	

構造物の剪断振動について（II）

On the Shearing Vibrations of a Structure (II)

林　五　郎（Goro Hayashi）

ABSTRACT — In this paper we treat the shearing vibration of a structure, with which we assume that the modulus of rigidity depends on x linearly, where x is longitudinal direction coordinate. To solve this boundary value problem of a partial differential equation, we use the method of Laplace transformation as previous paper. The foundamental differential equation and boundary conditions are:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}+\xi\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t};$$

$x=l$, $\left\{\mu(x)+\xi\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial y}{\partial x}=0$: There is no shearing stress at the top,

$x=0$, $t>0$, $y=f(t)$; $t<0$, $y=0$: The foundation follows the motion of the earthquake, $f(t)$ is a general arbitrary function of t.

$t\leqq 0$, $0\leqq x\leqq l$, $y=0$ There has been no vibration until an

$t\leqq 0$, $0<x\leqq l$, $\frac{\partial y}{\partial t}=0$: earthquake begins.

$t<0$; $x=0$, $\frac{\partial y}{\partial t}=0$

In the fundamental differential equation, we assume that the modulus of rigidity $\mu(x)$ depends on x linearly as stated previously and say

$$\mu(x)=\mu+k(l-x),$$

where k is a constant.

---

1. 構造物の剪断振動一般論．　構造物の振動を研究するのに，それを梁構と考えてやる事ができると云うことは既に末広博士によって認められている．而して構造物が地震動を受けて振動する場合その剪断振動の方が横振動よりも重要なる場合が多い。本論文はこの種の振動に関す

る基礎理論的研究である。

剪断振動の基礎微分方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}+\xi\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}$$

である。こゝに y は水平な剪断変位で，x は縦方向の座標で構造物の基盤を $x=0$ に取り，その高さを l とする。$\mu(x)$ は剛性率(剪断率)で，ξ は内部摩擦係数，η は媒質による粘性減衰係数である。又 ρ は密度を表わす。本論文に於いては剛性率は直線的に変化するものと假定して

$$\mu(x)=\mu+k(l-x)$$

と置く。こゝに k は比例の定数である。従って考える剪断振動の方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\mu+k(l-x)}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{k}{\rho}\frac{\partial y}{\partial x}+\xi\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\qquad\cdots\cdots\quad(1)$$

である。而して境界條件及び初期條件は

$$\left.\begin{array}{l} x=l,\ \left\{\mu(x)+\xi\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial y}{\partial x}=0\ ：\text{上端には剪断応力はない。}\\ x=0,\ t>0\ y=f(t),\ t<0,\ y=0\ ：\text{基盤は地震動}f(t)\text{を受ける。}\end{array}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{array}{l} t\leqq 0,\ 0\leqq x\leqq l,\ y=0\\ t\leqq 0,\ 0<x\leqq l,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0\quad：\text{地震が起るまでは振動しない。}\\ t<0,\ x=0,\ \frac{\partial y}{\partial t}=0\end{array}\right\}\quad(3)$$

(2) 及び (3) なる境界及び初期條件の下に (1) を解くことが目的である。Laplace 変換の方法によって解を求めよう。そのために

$$\mathfrak{L}\{y(x,t)\}=p\int_0^\infty e^{-pt}y(x,t)dt=Y(x,p)$$

と置けば初期條件より

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\}=p^2Y,\quad \mathfrak{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\}=pY$$

従って (1) に Laplace 変換を施せば

$$\left\{\frac{\mu+k(l-x)}{\rho}+p\xi\right\}Y''-\frac{k}{\rho}Y'-(p^2+\eta p)Y=0\qquad(4)$$

今 $$\frac{\mu+k(l-x)}{\rho}+p\xi=Z,\quad \frac{2\rho p\sqrt{Z}}{k}=w,\quad \sqrt{1+\frac{\eta}{p}}\,w=u\qquad(5)$$

なる変換を行えば (4) は

$$\frac{d^2Y}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dY}{du}-Y=0. \quad \text{------------} \quad (6)$$

故に一般解は $\quad Y=AI_0(u)+BK_0(u).$ ------------ (7)

任意定数 A, B は境界條件(2)より決定される。(2)の変数 x を u に変換し Laplace 変換を行えば(2)なる條件は

$$u=u_\ell=\frac{2\rho p}{k}\sqrt{1+\frac{\eta}{p}}\sqrt{\frac{\mu}{p}+p\xi}, \quad \frac{dY}{du}=0 \quad \text{-------} \quad (8)$$

$$u=u_0=\frac{2\rho p}{k}\sqrt{1+\frac{\eta}{p}}\sqrt{\frac{\mu+k\ell}{p}+p\xi}, \quad Y=F(p) \quad \text{------} \quad (9)$$

となる。こゝに $x=\ell$, $x=0$ に対応する u の値が u_ℓ, u_0 である。又 $F(p)$ は $f(t)$ の Laplace 変換である。

(8), (9) によって(7)の任意定数を決定すれば

$$Y=\frac{F(p)}{I_1(u_\ell)K_0(u_0)+K_1(u_\ell)I_0(u_0)}\left\{K_1(u_\ell)I_0(u)+I_1(u_\ell)K_0(u)\right\} \quad (10)$$

これが我々の問題の演算子解である。

今 $$\frac{I_1(u_\ell)K_0(u)+K_1(u_\ell)I_0(u)}{I_1(u_\ell)K_0(u_0)+K_1(u_\ell)I_0(u_0)}=\frac{F_2(p)}{p} \quad \text{-------} \quad (11)$$

と置けば $\quad Y=F(p)\,F_2(p)/p.$

従って Borel の定理によって

$$y(x,t)=\int_0^t f(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \quad \text{-------------} \quad (12)$$

が求める解になる。但し

$$f_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}\frac{e^{pt}}{p}F_2(p)\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}e^{pt}\frac{I_1(u_\ell)K_0(u)+K_1(u_\ell)I_0(u)}{I_1(u_\ell)K_0(u_0)+K_1(u_\ell)I_0(u_0)}\,dp. \quad (13)$$

は求められたとする。併し実験にはこの計算は困難である。又これを計算するには(10)又は(13)の分母を0と置いた方程式

$$I_1(u_\ell)K_0(u_0)+K_1(u_\ell)I_0(u_0)=0$$

の根を求めねばならない。即ちこの式に於いて u_ℓ 及び u_0 は p の函数であるから p について解くのであるが(8), (9)よりわかるように ξ, η が 0 でない時には極めて複雑である。併し理論的に云えばこれより得られる根を $p=p_n+iq_n$ とすればこれより実数部分 p_n が減衰を, 虚数部分 q_n が振動数を与える事になるのである。

2. 非減衰剪断振動　以上に於いて $\eta=0,\ \xi=0$ 即ち減衰係数が 0 となる場合は問題は簡単となる。この場合には

$$u_l=\frac{2\rho p}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}=\alpha p,\quad u_0=\frac{2\rho p}{k}\sqrt{\frac{\mu+kl}{\rho}}=\beta p$$

と書けば α,β は定数で $u_l,\ u_0$ は p の一次式である。故に振動数方程式は

$$I_1(\alpha p)K_0(\beta p)+K_1(\alpha p)I_0(\beta p)=0 \tag{14}$$

となる。今

$$J_1(\alpha p)Y_0(\beta p)-Y_1(\alpha p)J_0(\beta p)=0 \tag{15}$$

を考えればこれの根は良く知られたように負の相異る根である。これを $p=-p_n$ とすれば (14) の根は $p=-ip_n$ となる。故に振動数方程式は (15) であると云ってよい。この場合には (13) は

$$f_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br_1}e^{pt}\frac{I_1(\alpha p)K_0(\gamma p)+K_1(\alpha p)I_0(\gamma p)}{I_1(\alpha p)K_0(\beta p)+K_1(\alpha p)I_0(\beta p)}\,dp$$

で、ここに

$$u=\gamma p=\frac{2\rho p}{k}\sqrt{\frac{\mu+k(l-x)}{\rho}}.$$

それで分母の零点 $p=-ip_n$ が一次の極なる事に注意して、そこに於ける留数を計算して

$$f_2(t)=\sum e^{-ip_nt}\frac{J_1(\alpha p_n)Y_0(\gamma p_n)-J_0(\gamma p_n)Y_1(\alpha p_n)}{[J_1(\alpha p_n)Y_0(\beta p_n)-J_0(\beta p_n)Y_1(\alpha p_n)]'}$$

従って

$$y(x,t)=\sum\frac{J_1(\alpha p_n)Y_0(\gamma p_n)-J_0(\gamma p_n)Y_1(\alpha p_n)}{[J_1(\alpha p_n)Y_0(\beta p_n)-J_0(\beta p_n)Y_1(\alpha p_n)]'}\int_0^t e^{-ip_n(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau \tag{16}$$

が非減衰剪断振動の解になる。こゝに

$$\alpha=\frac{2\rho}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad \beta=\frac{2\rho}{k}\sqrt{\frac{\mu+kl}{\rho}},\quad \gamma=\frac{2\rho}{k}\sqrt{\frac{\mu+k(l-x)}{\rho}}.$$

而して $-p_n$ は

$$J_1(\alpha p)Y_0(\beta p)-Y_1(\alpha p)J_0(\beta p)=0 \tag{15}$$

の根である。

Bessel 函数 $J_\nu(Z),\ Y_\nu(Z)$ に於いては変数 $|Z|$ が大なる時は

$$J_\nu(Z)=\sqrt{\frac{2}{\pi Z}}\cos\left(Z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$$

$$Y_\nu(Z)=\sqrt{\frac{2}{\pi Z}}\sin\left(Z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$$

故にこれを (15) に代入して変数の大なる時の $-p_n$ の近似値が求められる。その結果は

$$p = -p_n = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{k}{2\sqrt{\rho}} \frac{\pi}{\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu + kl}} \tag{17}$$

これより基盤に於ける剛性率が大きい時は振動数が大となり,従って週期が減少する事がわかる。

次に一般の地震動の形は複雑でこれを調和振動のように考える事は不適当ではあるが今は簡単のために

$$f(t) = a \sin \omega t \tag{18}$$

と置いて,この時の定常強制振動を考えよう。この場合には

$$F(p) = a \frac{p\omega}{p^2+\omega^2}$$

であるから

$$Y = a \frac{p\omega}{p^2+\omega^2} \frac{I_1(\alpha p) K_0(\gamma p) + K_1(\alpha p) I_0(\gamma p)}{I_1(\alpha p) K_0(\beta p) + K_1(\alpha p) I_0(\beta p)}$$

故に

$$y(x,t) = \frac{a}{2\pi i} \int_{Br_1} \frac{e^{pt}}{p} \frac{p\omega}{p^2+\omega^2} \frac{I_1(\alpha p) K_0(\gamma p) + K_1(\alpha p) I_0(\gamma p)}{I_1(\alpha p) K_0(\beta p) + K_1(\alpha p) I_0(\beta p)} dp$$

定常強制振動の項 $p^2+\omega^2=0$ 即ち $p=\pm i\omega$ に於ける留数を計算して得られる。その結果は容易に

$$\text{定常強制振動} = a \frac{J_1(\alpha\omega) Y_0(\gamma\omega) - J_0(\gamma\omega) Y_1(\alpha\omega)}{J_1(\alpha\omega) Y_0(\beta\omega) - J_0(\beta\omega) Y_1(\alpha\omega)} \sin \omega t \tag{19}$$

なる事がわかる。これより強制振動と自由振動との振動数が等しい時に共振が起る事が云える。而して変数の大なる時は

$$\text{定常強制振動} = a\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\cos\{(\alpha-\gamma)\omega\}}{\cos\{(\alpha-\beta)\omega\}} \sin \omega t$$

となる。

全く同様にして自由振動も計算されるがこゝでは省略しよう。

さて(19)によって定常強制振動がわかったらこの構造物の各部に於ける剪断力を計算することができる。今それを V とすれば($\sin \omega t = 1$ として)

$$V = -\mu(x)\frac{\partial y}{\partial x} = \omega\sqrt{\rho}\sqrt{\mu + k(l-x)} \frac{J_1(\gamma\omega) Y_1(\alpha\omega) - J_1(\alpha\omega) Y_1(\gamma\omega)}{J_1(\alpha\omega) Y_0(\beta\omega) - J_0(\beta\omega) Y_1(\alpha\omega)} \tag{20}$$

これより V_{max} になるような x の値を求める。それには

$$\sqrt{\mu + k(l-x)}\{J_1(\gamma\omega) Y_1(\alpha\omega) - J_1(\alpha\omega) Y_1(\alpha\omega)$$

を最大ならしめる x の値を見出せばよい。そうすると少しく計算して,それは

$$Y_1(\alpha\omega) J_2(\gamma\omega) - J_1(\alpha\omega) Y_2(\gamma\omega) = 0 \tag{21}$$

で与えられる事がわかる。再び変数が大なる時には(21)は

$$\cos\{(\alpha-\gamma)\omega\}=0$$

となり，従って

$$\sqrt{\mu}-\sqrt{\mu+k(l-x)}=\frac{2n-1}{2}\pi\frac{d}{2\sqrt{\rho}}\frac{1}{\omega}$$

を満足する $0\leqq x\leqq l$ なる x が τ_{max} を与えることになる。

3. 載荷せる構造物の非減衰剪断振動　最後に構造物の上端に集中荷重の載荷された場合には $x=l$ に於ける境界条件は

$$-M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\mu S\frac{\partial y}{\partial x} \tag{22}$$

で与えられる。こゝに S は $x=l$ に於ける断面積である。この場合にも計算は全く同様であるから精しく論ずる必要はない。第1節と同様にして変数変換と Laplace 変換を行えば (22) の境界条件は

$$u=u_l=\frac{2\rho p}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad pMY=\sqrt{\rho\mu}\,S\frac{dY}{du}$$

となる。これより一般解

$$Y=AI_0(u)+BK_0(u)$$

の任意定数を決定する式は

$$A\left\{I_1(u_l)-\frac{pM}{\sqrt{\rho\mu}\,S}I_0(u_l)\right\}-B\left\{K_1(u_l)+\frac{pM}{\sqrt{\rho\mu}\,S}K_0(u_l)\right\}=0$$

$$AI_0(u_0)+BK_0(u_0)=F(p).$$

従って演算子解は

$$Y=\frac{\left\{I_1(u_l)-\frac{pM}{\rho cS}I_0(u_l)\right\}K_0(u)+\left\{K_1(u_l)+\frac{pM}{\rho cS}K_0(u_l)\right\}I_0(u)}{\left\{I_1(u_l)-\frac{pM}{\rho cS}I_0(u_l)\right\}K_0(u_0)+\left\{K_1(u_l)+\frac{pM}{\rho cS}K_0(u_l)\right\}I_0(u_0)}F(p) \tag{23}$$

こゝに $c=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ である。以下は前と同様である。(23) の分母を0と置いた式が振動数方程式であり，これを書き換えれば振動数方程式は

$$\frac{J_0(\beta p)}{J_1(\alpha p)-\frac{pM}{\rho cS}J_0(\alpha p)}=\frac{Y_0(\beta p)}{Y_1(\alpha p)-\frac{pM}{\rho cS}Y_1(\alpha p)} \tag{24}$$

となる。前と同様にして変数の値が大きい時は振動数の近似値は (24) より

$$1+\frac{pM}{\rho cS}\tan\{(\alpha-\beta)p\}=0$$

によって計算される。

4. 結び。 本研究に於いては全く基礎的な理論計算だけを述べ実際の数値計算や $f(t)$ の種々なる形に就いての計算は次の機会にゆづることにした。尚この方面の研究は $\mu(x)$ が一定なる時には旣に内外の多くの研究者によってやられている。又最近では $\mu(x)$ が直線的に変化する際の自由振動を変数分離法によって田治米辰雄氏が研究され，振動数について論じられている。本論文の結果にはこれと一致しているものもある。