

ROSEリポジトリいばらき（茨城大学学術情報リポジトリ）

Title	遊びまたは初圧のある系の強制振動
Author(s)	鈴木, 正夫
Citation	茨城大学工学部研究集報(2(1)): 37-44
Issue Date	1949-09
URL	http://hdl.handle.net/10109/7278
Rights	

このリポジトリに収録されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作権者に帰属します。引用、転載、複製等される場合は、著作権法を遵守してください。

お問合せ先

茨城大学学術企画部学術情報課（図書館） 情報支援係
<http://www.lib.ibaraki.ac.jp/toiawase/toiawase.html>

遊びまたは初圧のある系の強制振動

On the Forced Vibrations of the Systems Subjected to Restoring Forces with Clearance or Initial Spring Set.

鈴木正夫 (Masao Suzuki)

ABSTRACT— In this paper,

(1) We obtain the approximate formula which enables us to calculate the amplitudes of vibrating mass, subjected to the restoring force with clearance, at sub-harmonic resonances. The formula (6) or (9) corresponds to the case with viscous damping force or not respectively. and,

(2) We study one case of forced vibration, in which the system is subjected to the restoring force of initial spring set type, and we obtain the theoretical results which can well explain the experimental results.

1. 基礎方程式と近似解

復原力と変位との関係が図1の実線で表わされるようなバネに吊るされた質量 m に週期力 $P \cos \omega t$ が作用する場合を考える。 K_0 が K に比して充分小なるときは、遊びのある場合に相等しく、 $K_0 \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, $K_0 a \rightarrow F$ (有限な常数) なる極限移行を行うときは初圧のある系になる。このときの定常運動の振巾及び外力との位相差を求めるために

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Kx - G(x) &= P \cos(\omega t + \varphi) \\ (K - K_0)a & \quad (x \geq a) \\ (K - K_0)x & \quad (|x| \leq a) \\ -(K - K_0)a & \quad (x < -a) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$t = 0 \text{ かつ } x = A > 0, \dot{x} = 0 \dots (2)$$

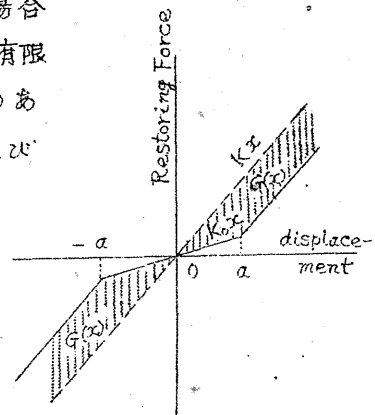


Fig. 1

を満足する週期 $2\pi\lambda/\omega$ (λ : 正整数) の週期解を求めることを考える。このような解が存在するという事は λ 次の sub-harmonic の振動が存在することを意味する。(1)(2) 中の A および φ は、のちに決定されるべき未知数である。

函数 $G(x)$ 中の x を $A \cos \frac{\omega t}{\lambda}$ でおきかえると G はその函数となりその Laplace 変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(x)\} &= p \int_0^{\infty} G\{x(t)\} e^{-pt} dt \\ &= (K-K_0) a + 2 \left[\frac{p(K-K_0)A}{p^2 + \frac{\omega^2}{\lambda^2}} \left\{ \frac{ap}{A} \operatorname{ch} p\tau - \frac{\omega}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \operatorname{sh} p\tau \right\} \right. \\ &\quad \left. - (K-K_0) a \operatorname{ch} p\tau \right] \times \frac{e^{-\frac{\pi}{2\omega} \lambda p}}{1 + e^{-\frac{\pi\lambda}{\omega} p}} \quad \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

となる。こゝに

$$\frac{\omega t}{\lambda} = \sin^{-1} \frac{a}{A}$$

今 $x(t)$ の Laplace 変換を $X(p)$ と書けば、(2) によつて

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = pX(p) - pA, \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = p^2X - p^2A$$

であるから、(1) の両辺に Laplace 変換を施して $X(p)$ について解けば

$$X(p) = \frac{(p^2 + 2\varepsilon p)A}{p^2 + 2\varepsilon p + \omega_0^2} + \frac{g(p^2 \cos \varphi - \omega p \sin \varphi)}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2\varepsilon p + \omega_0^2)} + \frac{\mathcal{L}\{G\}}{m(p^2 + 2\varepsilon p + \omega_0^2)} \quad \dots \dots (4)$$

をうる。こゝに

$$2\varepsilon = \alpha/m, \quad \omega_0^2 = K/m, \quad g = P/m.$$

(4) 式中の $\mathcal{L}\{G\}$ に (3) 式を代入すれば 問題の近似解が得られることになる。(3) 式の $\mathcal{L}\{G\}$ を用いて (4) 式の Bromwich 積分を計算すれば

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br.} X(p) \frac{e^{pt}}{p} dp \\ &= e^{-\varepsilon t} \left[M \cos \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} t + N \sin \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} t \right] + M' \cos \omega t + N' \sin \omega t \\ &\quad + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(M_n \cos \frac{n\omega}{\lambda} t + N_n \sin \frac{n\omega}{\lambda} t \right) \quad \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

なる形となる。ただし M, N, M', N', M_n, N_n はすべて A, φ, ω 等の函数である。(5) 式で与えられる $x(t)$ が週期 $2\pi\lambda/\omega$ の週期函数であるためには次の二式が成立しなければならぬ。

$$\begin{aligned}
 M &= A + \frac{\gamma \{ (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \varphi - 2\varepsilon \omega \sin \varphi \}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2} \frac{(K - K_0)a}{m \omega_0^2} + \frac{(K - K_0)\frac{\omega}{\lambda}}{m \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}} \frac{PR - QS}{P^2 + Q^2} = 0 \\
 N \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} &= A \varepsilon \frac{\gamma \{ \varepsilon (\omega^2 + \omega_0^2) \cos \varphi + \omega (\omega^2 - \omega_0^2 + 2\varepsilon^2) \sin \varphi \}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2} \frac{(K - K_0)a \varepsilon}{m \omega_0^2} \\
 &\quad + \frac{(K - K_0)\frac{\omega}{\lambda}}{m} \frac{QR + PS}{P^2 + Q^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

こゝに

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - \omega_0^2 + 4\varepsilon^2 \right) \text{chc} + \varepsilon \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 3\omega_0^2 + 4\varepsilon^2 \right) \text{shs} \\
 Q &= -\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - \omega_0^2 + 4\varepsilon^2 \right) \text{shs} + \varepsilon \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 3\omega_0^2 + 4\varepsilon^2 \right) \text{chc} \\
 R &= \sqrt{A^2 - a^2} (\varepsilon \text{shct} - \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \text{chst}) + a \frac{\omega}{\lambda} \text{chct} \\
 S &= \sqrt{A^2 - a^2} (\varepsilon \text{chst} + \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \text{shct}) + a \frac{\omega}{\lambda} \text{shst}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$\text{chc} \equiv \text{ch} \frac{\pi \lambda}{2\omega} \varepsilon \cos \frac{\pi \lambda}{2\omega} \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}, \quad \text{shs} \equiv \text{sh} \frac{\pi \lambda}{2\omega} \varepsilon \sin \frac{\pi \lambda}{2\omega} \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}, \text{ etc.}$
 $\text{shct} = \text{sh} \varepsilon \tau \cos \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \tau, \quad \text{chst} = \text{ch} \varepsilon \tau \sin \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \tau, \text{ etc.}$

上式によって A 及び φ を決定することができる。

2. 遊びのある系

$K_0 \ll K$ によって示される遊びのある系に於いて特に $\varepsilon = 0$ なる場合の解を具体的に示そう。このとき(6)式は次の二式に帰着する。

$$\begin{aligned}
 A + \frac{\gamma \cos \varphi}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{(K - K_0)}{m \omega_0^2} \left\{ a - \frac{\omega}{\lambda} \frac{(-\sqrt{A^2 - a^2} \omega_0 \sin \omega_0 \tau + a \frac{\omega}{\lambda} \cos \omega_0 \tau)}{\omega_0 \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - \omega_0^2 \right) \cos \frac{\pi \lambda}{2} \frac{\omega_0}{\omega}} \right\} &= 0 \\
 \frac{\gamma \omega \sin \varphi}{\omega_0 (\omega^2 - \omega_0^2)} &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

右の式より $\varphi = 0$ または π 。

故に左の式より $\left(\frac{A}{a} \equiv \varepsilon, \omega/\omega_0 \equiv u, K_0/K \equiv p^2, \gamma/a\omega_0^2 \equiv f, \frac{\varepsilon}{\omega_0} \equiv \varepsilon \right)$ とおいて)

$$\varepsilon - (1 - p^2) \left\{ 1 + \frac{\cos \left(\frac{\lambda}{u} \sin^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{\lambda}{u} \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \left(\frac{\lambda}{u} \sin^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \right)}{\left(\frac{\lambda^2}{u^2} - 1 \right) \cos \frac{\lambda}{u} \frac{\pi}{2}} \right\} = \pm \frac{f}{u^2 - 1} \tag{9}$$

をうる。右辺の (+) は $\varphi = \pi$ に、(-) は $\varphi = 0$ に対応する。

p^2 が与えられたとき $1/\varepsilon$ をパラメーターとして、 λ/u を横軸にとり、(9)式左辺の値を縦軸にとって曲線群を描いておく。与えられた f 及び u

に於ける入-次分数調波振動の振巾 λ を求めるには、この図の上に $(\pm \frac{f}{u^2-1}, \frac{u}{\lambda})$ なる座標を有する点をと、この点に対応する $\frac{1}{2}$ の値をよ

みとればよい(第2図)。この結果はこの変域を三つの区間に分けて、そのおのおのに於いて成立つ線形方程式の解を滑らかに接続させる方法によって得られる結果よりもよほど簡単である。上述の方法によって得られた λ と u の関係の一例を第3図に示す。図は $f=0.2$ の場合であるが、 f の値を変えても振巾は殆ど変化せず、 f が増大するとき振巾は反って幾分減少する傾向にある。図には奇数次のものだけ記してあるが、それは実験的に偶数次の分数調波振動が出にくいということ¹⁾ および偶数次分数調波振動は非対称な変位を行うために A が振巾という意味を失うという二つの理由による。

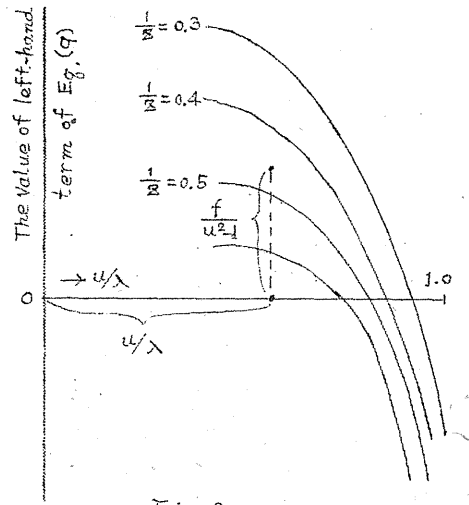


Fig. 2

$\varphi=0$ になるとき、 $\lambda > 1$ なるためには、(9) 式より

$$\frac{f}{u^2-1} \leq -1 + (1-p^2) \frac{\lambda^2}{\lambda^2-u^2}$$

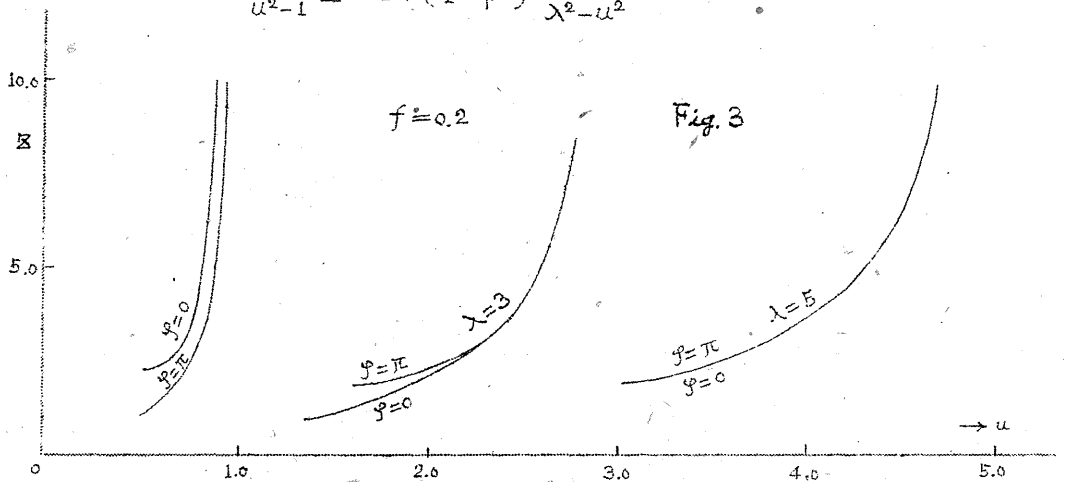


Fig. 3

でなければならぬことがわかる。

3. 初圧のある系

はじめに述べたように $K_0 \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, $K_0 a \rightarrow F$ とすると復元力曲線は初圧型となる。そこで M, N に同じ極限移行をおこなえば初圧のある系の強制振動振幅及び位相差を決定する式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \lim M &= A + \frac{g\{(\omega^2 - \omega_0^2)\cos\varphi - 2\varepsilon\omega\sin\varphi\}}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\varepsilon^2\omega^2} + \frac{F}{m\omega_0^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}chc + \varepsilon shs}{\sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}(\cos^2 + sh^2)} \right] = 0 \\ \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} \lim N &= A\varepsilon - \frac{g\{\varepsilon(\omega^2 + \omega_0^2)\cos\varphi + \omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\varepsilon^2)\sin\varphi\}}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\varepsilon^2\omega^2} + \frac{F}{m\omega_0^2} \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon chc - \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} shs}{\cos^2 + sh^2} \right] = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

この式を解いて

$$\Sigma = -\mathcal{H}(1-\Phi) \pm \sqrt{\frac{1}{M} - \mathcal{H}^2 \Psi^2}, \quad \tan\varphi = -\frac{2\mathcal{H}u}{u^2 - 1} \frac{\Sigma + \mathcal{H}\{(1-\Phi) + \frac{u^2-1}{2\mathcal{H}u}\Psi\}}{\Sigma + \mathcal{H}\{(1-\Phi) - \frac{2\mathcal{H}u}{u^2-1}\Psi\}} \quad (11)$$

ただし

$$\Sigma \equiv A\omega_0^2/g, \quad \mathcal{H} \equiv \varepsilon/\omega_0, \quad \mathcal{H} \equiv F/P$$

$$\Phi \equiv \frac{chc + \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{1-\mathcal{H}^2}} shs}{\cos^2 + sh^2}, \quad \Psi \equiv \frac{shs}{u\sqrt{1-\mathcal{H}^2}(\cos^2 + sh^2)}, \quad M \equiv (u^2 - 1)^2 + 4\mathcal{H}^2 u^2$$

$$chc \equiv ch \frac{\pi\lambda\mathcal{H}}{2u} \cos \frac{\pi\lambda}{2u} \sqrt{1-\mathcal{H}^2}, \quad shs \equiv sh \frac{\pi\lambda\mathcal{H}}{2u} \sin \frac{\pi\lambda}{2u} \sqrt{1-\mathcal{H}^2},$$

$$\cos^2 \equiv \cos^2 \frac{\pi\lambda}{2u} \sqrt{1-\mathcal{H}^2}, \quad sh^2 \equiv sh^2 \frac{\pi\lambda}{2u} \mathcal{H}$$

とする。

(11)式によって計算した結果の一例を才4, 5図に示す。図は $\mathcal{H} = 0.125$, $\mathcal{H} = 1.0$ の場合であって、 u が或値以下であると(10)式は正の Σ を与えず、その値以上では二つの Σ が得られる。このうち小さい方の Σ は不安定な振動に対応するものと思われる。このことは外力の最大値が初圧より小さければ強制振動数の小さい間は運動が起らず振動数が或値に達すると急激に大振幅の振動が発生することを意味する。

質点支持している台を振幅 a で振動させて変位による強制振動を行なうときには $P = ma\omega^2$ であるから、今振幅 A を a を基準にして測り

$$A/a \equiv \bar{\Sigma}$$

とし、 \mathcal{H} の代わりに

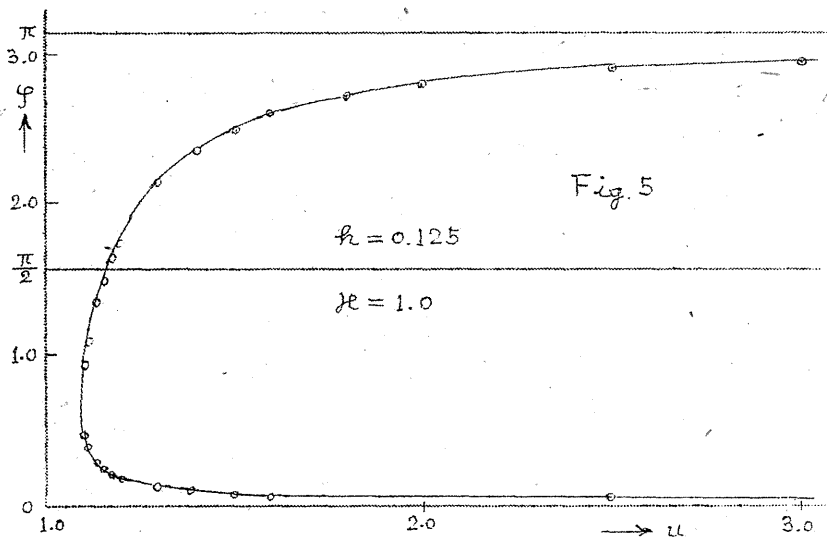
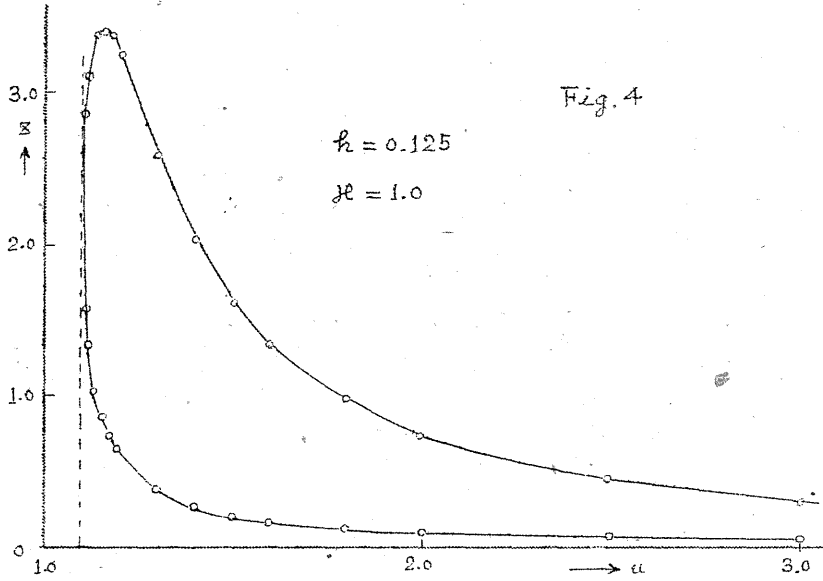
$$F/Ka \equiv \sigma$$

また σ を新しいパラメータにとると,

$$\bar{x} = zu^2, \quad \sigma = \mathcal{H}u^2$$

であるから、(10)式より

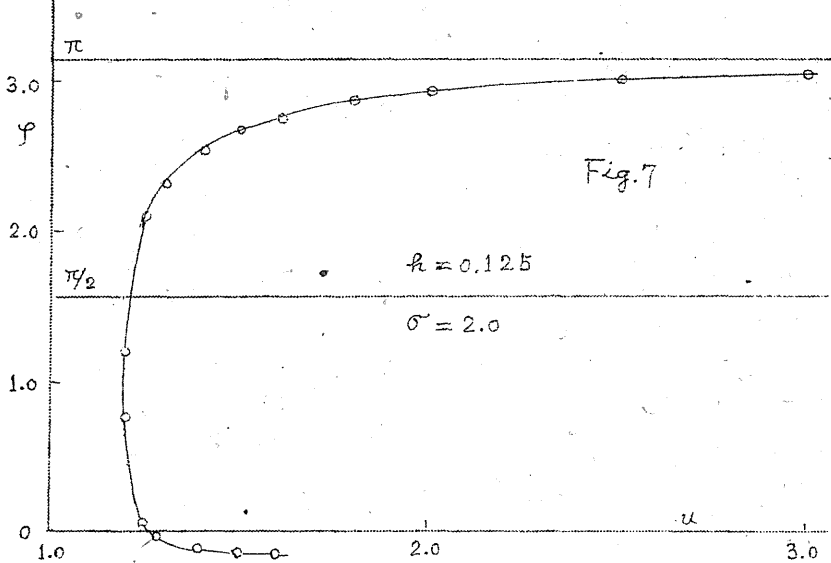
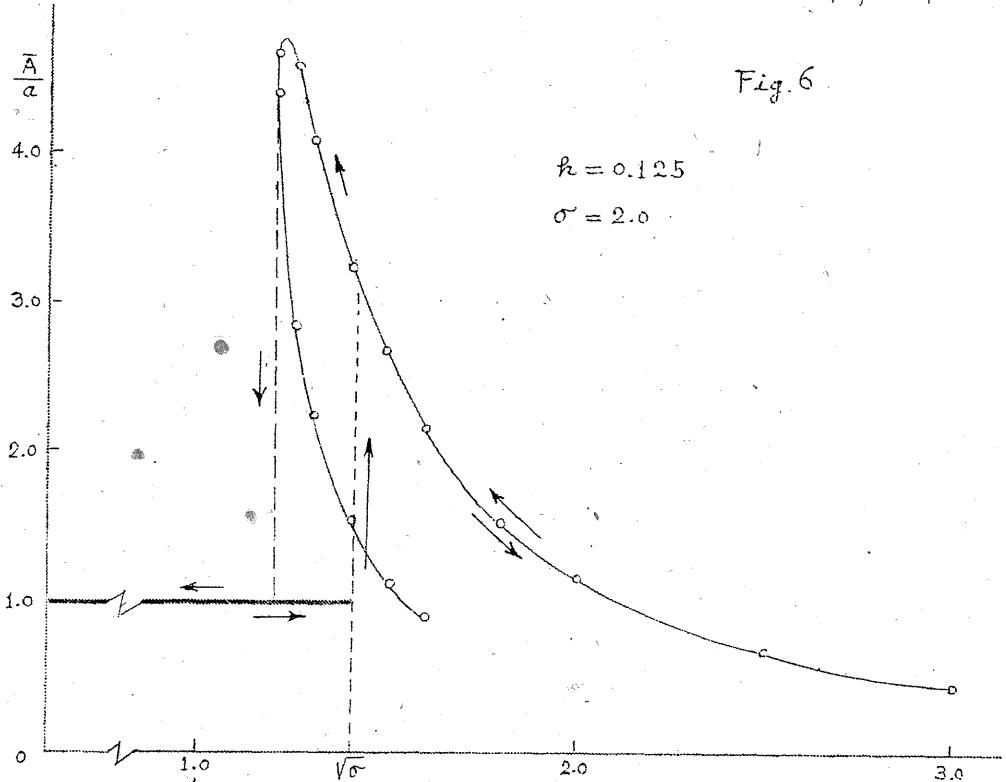
$$\bar{x} = -\sigma(1-\phi) \pm \sqrt{\frac{u^4}{M} - \sigma^2 \Psi^2}, \quad \tan \varphi = \frac{-\frac{2\mathcal{H}u}{u^2-1} \frac{\bar{x} + \sigma \left\{ (1-\phi) + \frac{u^2-1}{2\mathcal{H}u} \Psi \right\}}{\bar{x} + \sigma \left\{ (1-\phi) - \frac{2\mathcal{H}u}{u^2-1} \Psi \right\}} \dots (12)$$



をうる。A は支持台との相対振巾であるから \bar{A} を絶対振巾とすれば、

$$(\bar{A}/a)^2 = 1 + \bar{x}^2 + 2\bar{x} \cos \varphi \quad \text{--- (13)}$$

となる。 $\mu = 0.125$, $\sigma = 2.0$ のときの \bar{A}/a および φ を計算した結果を
 表6, 7 図に示す。 $F \cong m a \omega^2$ 即ち $u \cong \sqrt{\sigma}$ なる時は $\bar{x} = 0$, $\varphi = 0$.



すなわち $\bar{A}/a=1$ も一つの安定な平衡状態であつて $u=0$ から \sqrt{a} を越えて逐次振動数を高めて行き、次に逆に順次振動数を下げて行くときは才6図中の矢印で示すような共振曲線の図の上に履歴曲線の描かれることが理解される。即ち樺木氏の実験結果⁽²⁾とよく一致している。

最後に林教授、安宅教授其の他の方々の御指導御討論を感謝いたします。

後記—— 近似的に(1)式によって支配される電気回路の *Sub-cycle oscillation* について、安宅教授より御注意があつたが、基準となる振動数のとり方が本論に於けるものと異なっているようである。これについては後にゆづることとし、ここではたゞ(1)式で表わされる系に於ては分数調波振動に二つの系列があるらしいということを描べるにとどめる。

(2) 樺木義一：日本機械学会論文集 14巻 47号および48号。