球が円筒によって切りとられる部分の面積

The Surface Area Cut Off from the Sphere by the Cylinder

鈴 木 正 夫 (Masao Suzuki)

ABSTRACT—— In connection with a certain engineering problem, it is required to compute the surface area which is cut off from the sphere $r^2+z^2=a^2$ by the cylinder $r^2-2cr\cos\theta+c^2=b^2$ $(c<a+b)$. The required area S is given by the elliptic integrals which contain the integral:

$$\int_0^1 \frac{dy}{\left\{1-\frac{(b+c)^2}{a^2}k^2y^2\right\}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad 0<k^2<\frac{(b+c)^2}{a^2}k^2<1$$

This integral can be represented by the elliptic integrals of first and second kind. As a result, we obtain

$$S=\frac{2a\{(b+c)^2-a^2\}}{\sqrt{bc}}\left[\frac{2b}{c+b}F(k,\tfrac{\pi}{2})-\frac{E(k,\frac{\pi}{2})}{k^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2a(c-b)}{(c+b)^2k^2\sin 2\alpha}\left\{\left(E(k,\tfrac{\pi}{2})-F(k,\tfrac{\pi}{2})\right)F(k',\alpha)+F(k,\tfrac{\pi}{2})E(k',\alpha)\right\}\right]$$

where F and E are the elliptic integrals of first and second kind, respectively; and

$$k^2=\frac{a^2-(c-b)^2}{4bc}, \quad k'^2=1-k^2, \qquad \sin^2\alpha=\frac{4bc}{(b+c)^2}$$

---

1. 或工学的な問題(1)に関連して球が円筒によって切りとられる部分の表面積を求める必要があった。問題は結局楕円積分の計算になるが，第三種楕円積分の特殊型を含んでいて面白い。楕円積分の一例題として参考に供したい。

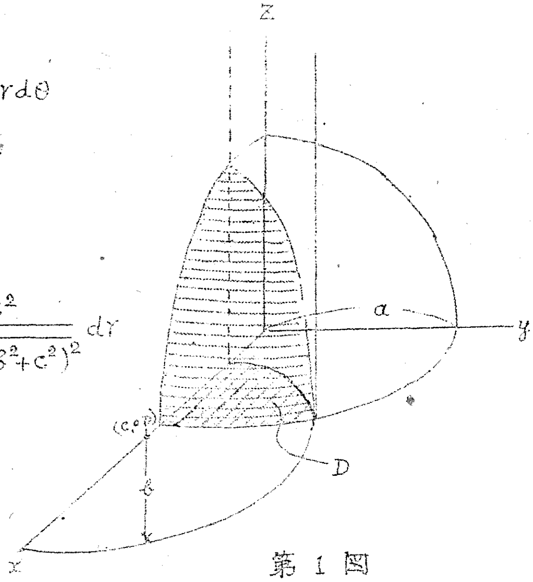
2. 球面 $r^2+z^2=a^2$ が柱面 $r^2-2cr\cos\theta+c^2=b^2$ によって切りとられる部分の表面積を求めよう（図参照）。a, b は夫々球及び円柱面の半径，c はその中心間の距離である。求める面積 S は D を xy 平面上の二つの円 $r=a$, $r^2-2cr\cos\theta+c^2=b^2$ 及び x 軸によって囲まれた面

分とするとき

$$\frac{1}{4}S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\; r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{c-b}^{a}\frac{a\,r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\int_0^{\cos^{-1}\frac{r^2-b^2+c^2}{2cr}}d\theta$$

$$=-\int_{c-b}^{a}\frac{a\sqrt{a^2-r^2}}{r}\,\frac{r^2+b^2-c^2}{\sqrt{4c^2r^2-(r^2-b^2+c^2)^2}}\,dr$$



第 1 図

今 $a^2-r^2=z^2$ とおいて上式を変形すると結局

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}S&=\int_{\sqrt{a^2-(c-b)^2}}^{0}\frac{a z^2(a^2+b^2-c^2-z^2)}{(a^2-z^2)\sqrt{\varphi(z)}}\,dz\\ \varphi(z)&=\{a^2-(b-c)^2-z^2\}\{(b+c)^2-a^2+z^2\}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

となる。

さてここで

$$\left.\begin{aligned}z^2&=\{(b+c)^2-a^2\}\frac{k^2y^2}{1-k^2y^2}\\ k^2&=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

なる変換を行うと

$$\frac{1}{4}S=\frac{a\{(b+c)^2-a^2\}}{2\sqrt{bc}}\int_1^0\left[\frac{k^2y^2\{a^2+b^2-c^2-2b(b+c)k^2y^2\}}{\{a^2-(b+c)^2k^2y^2\}\{1-k^2y^2\}}\right]\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

上式の[ ]内の函数は

$$-\frac{2b}{c+b}+\frac{1}{1-k^2y^2}-\frac{c-b}{c+b}\;\frac{1}{1-\frac{(b+c)^2}{a^2}k^2y^2}$$

のように部分分数に分解できるから

$$\frac{1}{4}S=\frac{a\{(b+c)^2-a^2\}}{2\sqrt{bc}}\left[\frac{2b}{c+b}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}-\int_0^1\frac{dy}{(1-k^2y^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right.$$

$$+\frac{c-b}{c+b}\int_0^1 \frac{dy}{\left\{1-\frac{(b+c)^2}{a^2}k^2y^2\right\}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\Bigg] \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

となる。

(3)式中の最初の積分は第一種完全楕円積分 $F(k, \frac{\pi}{2})$ である。二番目の積分は第三種であるが，次のようにして第二種完全楕円積分になおすことができる。今

$$y = sn\,u \quad とおけば \quad dy = cn\,u\,dn\,u\,du$$

であるから

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1-k^2y^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^K \frac{cn\,u\,dn\,u\,du}{(1-k^2sn^2u)\,cn\,u\,dn\,u} = \int_0^K \frac{du}{dn^2u} \quad \cdots\cdots (4)$$

ただし $4K$ は $sn\,u$ の基本週期であって $4F(k, \frac{\pi}{2})$ に等しい。話をいくらか一般的にするため(4)式最後の積分の上限 K を変数 u でおきかえたものを考えるに，これは次のようにして Jacobi の定義した E 函数

$$E(u) = \int_0^u dn^2u\,du$$

で表わすことができる。先づ

$$k'^2 = dn^2u - k^2cn^2u \qquad (k'^2 = 1-k^2)$$

であるから

$$\frac{1}{dn^2u} = \frac{1}{k'^2}\left(1-k^2\frac{cn^2u}{dn^2u}\right)$$

又

$$\frac{d}{du}\left(\frac{sn\,u}{dn\,u}\right) = \frac{cn\,u\,(dn^2u+k^2sn^2u)}{dn^2u} = \frac{cn\,u}{dn^2u}$$

を考慮すれば，部分積分法によって

$$\int_0^u \frac{du}{dn^2u} = \frac{1}{k'^2}\left[u-k^2\int_0^u \frac{cn^2u}{dn^2u}\,du\right]$$

$$= \frac{1}{k'^2}\left[u-k^2\left\{\frac{cn\,u\,sn\,u}{dn\,u}+\int_0^u sn^2u\,du\right\}\right]$$

しかるに

$$\int_0^u sn^2u\,du = \frac{1}{k^2}\left(u-\int_0^u dn^2u\,du\right)$$

であることは容易に分るから，結局

$$\int_0^u \frac{du}{dn^2 u} = \frac{1}{k'^2}\left[-k^2\frac{cn\,u\,sn\,u}{dn\,u} + E(u)\right] \quad \text{---------} \quad (5)$$

となる。特に上式において $u=K$ とおけば $E(K)=E(k,\frac{\pi}{2})$ を考慮して(4)式の値が次のように得られる。

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1-k^2y^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^K \frac{du}{dn^2 u} = \frac{E(k,\frac{\pi}{2})}{k'^2} \quad \text{------} \quad (6).$$

最後に(3)式中の第三の積分を表を用いて計算できる形に変換したい。一般に第三種楕円積分

$$\int \frac{dy}{(1-ny^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

に於て，

$$0 < n < k^2$$

なる場合の取扱いはたとえば友近博士の著書[(2)]等に記載されているが，今考えている問題では $b+c>a$ であるから明らかに

$$(1>)\ n > k^2$$

であって，筆者の手にし得る数種の内外の著書にはこのような場合について触れているものは見当らなかった。ところがある論文を通して次の公式が King の著書[(3)]にあることを知った。[(4)] 即ち，$1>n>k^2$ なるとき

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{dy}{(1-ny^2)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{2k}{k'^2 n^{\frac{1}{2}} \sin 2\alpha}\Big[\Big\{E(k,\tfrac{\pi}{2})- \\
&\qquad F(k,\tfrac{\pi}{2})\Big\}F(k',\alpha) + F(k,\tfrac{\pi}{2})E(k',\alpha)\Big] \\
&\text{こゝに} \\
&\sin^2\alpha = (n-k^2)/(nk'^2), \qquad k^2+k'^2=1
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(7)式に於いて $n=(b+c)^2k^2/a^2$ とおけば(3)式第三の積分が得られることになる。

以上を綜合して最後の結果，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4}S = \frac{a\{(b+c)^2-a^2\}}{2\sqrt{bc}}\Big[\frac{2b}{c+b}K - \frac{E}{k'^2} + \frac{2a(c-b)}{(b+c)^2k'^2\sin 2\alpha} \\
\{(E-K)F(k',\alpha) + KE(k',\alpha)\}\Big]
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$k^2=\frac{a^2-(c-b)^2}{4bc} \quad k'^2=1-k^2, \quad \sin^2\alpha=\frac{4bc}{(b+c)^2}$$

$$K=F(k,\tfrac{\pi}{2}), \quad E=E(k,\tfrac{\pi}{2})$$

に到達する。

3. $a=1$, $b=5$, $c=5.5$ として数値計算を行って見る。

$$k^2=\frac{1-0.25}{4\times5\times5.5}=0.00\dot{6}\dot{8}\dot{1}, \quad k'^2=0.993\dot{1}\dot{8}$$

林桂一高等函数表第29表を用い，Lagrange の補間式によって

$$K=1.5734849, \quad E=1.5681147$$

次に $\sin^2\alpha=0.99773243$, $\sin\alpha=0.99887$

$$\therefore \alpha=1.5226471=87.241248°\text{（Lagrange の式使用）}$$

又 $\sin^{-1}k'=1.4881761=85.266207°$

二変数の補間法を用いて

$$F(k',\alpha)=3.32765, \quad E(k',\alpha)=1.0073\bar{5}$$

又 $\sin 2\alpha=0.095112$

以上の諸数値を(8)式に代入して計算すると

$$S=2.92288$$

となる。

表を使用する際に比例部分法を用いると

$$K=1.57348 \quad E=1.56812$$

$$\alpha=81.52366=87.30° \quad \sin^{-1}k'=1.48840=85.28°$$

$$F(k',\alpha)=3.34084 \quad E(k',\alpha)=1.00782$$

となり，

$$S=2.9884$$

なる値を得る。2.92288 に比し約 2.2 % の誤差である。

註:—

(1) 眞野教授指導による本校学生の卒業研究"丸棒による硬度測定"

(2) 友近晋著： 楕円函数論，才V章，§ 50

(3) King "On the direct numerical calculations of elliptic functions and integrals" Cambridge, 1924, pp. 22-26.

(4) 林教授の御好意による。記して謝意を表する次才である。