Title	高等学校数学教育の問題点-1-
Author(s)	宮田. 竜雄 / 宮田. 加寿子
Citation	茨城大学教育学部紀要(24): 1-10
Issue Date	1975-03
URL	http://hdl.handle.net/10109/10704
Rights	

高等学校数学教育の問題点（１）

教育学部数学研究室　宮　田　龍　雄
常磐女子高等学校　宮　田　加　寿　子

（昭和49年10月12日受理）

まえがき

小・中学校における算数・数学科の指導要領の改訂に引き続いて，昭和45年10月に高等学校学習指導要領数学の改訂が告示され，それに基づいて昭和48年度の入学生から，新指導要領に準拠した数学教育が実施されている。小・中学校の新指導要領による算数・数学教育の内容における種々の問題点については，既に考察して来たので[1]，今回から数次にわたって，高等学校における数学教育の内容のなかから，問題点と思われることを順次考えてゆくことにする。本稿では，数学Ⅰ，代数・幾何の内容のうち，高等学校数学教育全般の基礎概念である"数と式"および"方程式と不等式"をとりあげることとする。なお以下の文中で，カギ括弧をつけたものは，すべて文部省指導要領または指導要領解説[2]からの引用であることを断っておく。

1. 数と式

a　実数の導入

新指導要領数学の目標(1)に「数を実数，複素数の範囲まで拡張し，数や式の基本的な概念，法則などの理解を深め（中略）それらを的確かつ能率的に活用する能力を養う」と規定し，その内容では「実数とその演算についての理解を深める」ことが要請されている。以前にも指摘しておいたことではあるが[3]，数学教育の場で，数学的な厳密さを保ちつつ論理的に数を導入したり，構成をはかることの不可能であることはいうまでもない。一方，小・中学校での数概念指導の積み重ねを考慮すれば，高等学校の段階における数の概念の指導のなかに，教育的に可能な限界内で数学性，論理性をもたせるべきであるとする意見も強い。これらの相反する条件をふまえて，数概念の導入にあたっては，数学性を意識しつつ，それを阻害しない限りでの直観，形式が部分的に大きな比重を占める指導となっても許されよう。しかしながら，以下で見られるように数学性を捨てた直観，形式にはしる指導が非常に多く見られることは残念である。

指導要領解説では「中学校においては，整数，有理数について学び，さらに数の平方根には有理数でないものがあることなど，無理数の存在を知らせることになっている」と述べている。上記の無理数は方程式（以下すべて実数体上の１変数代数方程式を簡単に方程式という）の根としてえられる代数的数（algebraic number）の意味であり，これらより遙かに大きな濃度（cardinality）をもつ集合の要素である超越数（transcendental number）は本質的には除外されてしまっている，ということに注意する必要がある。かかる背景のもとに，数学Ⅰにおける実数導入の実態を検定済の教科書（13冊[4]）でみると，(i)実数の導入について全く指導していないもの，3／13，(ii)$\sqrt{2}$が無理数（有理数でない数）であることを示し，πも有理数でないことを知らせる程度の説明のあと，有理数以外の数を無理数とよんでいるもの，4／13，(iii)循環しない無限小数として無理数を定義しているもの，2／13，(iv)数直線との対応を用いて，視覚的に無理数を理解させようとしているもの，4／13，となっている。

(i)の立場は，中学校での実数概念の指導ですでに十分であると考えているのか，または，中学校の指導はさておき，この段階での形式的な実数の導入は有害であり，生徒の自然にもつ直観を期待するよりほかはない，としているかのいずれかであろう。これに比べれば(ii)は指導要領にほぼ忠実に従っているものといえよう。(iii)は「有理数の十進小数表示からの類推」によって，無限小数の概念を直観的に生徒に理解させることは可能であると判断する立場をとったものである。

さて，(i)の考え方による各教科書では，数学Ⅰにおける他の基本的な概念の導入にも類似の態度を示している

のは当然なのであるが，このことは中学校，高等学校の数学教育の接点をなす種々の内容の扱いを，互いに譲り合い，避ける結果を招くとも見られる。したがって，中高の数学教育をなめらかにする意味では好ましくないことといえよう。(i)は２，３の例示のみで無理数の概念を生徒に把握させることができるものと期待する立場と解釈されるが，この段階の生徒の思考しうる数の範囲は，実数全体を網羅するものでないことに注意したい。いいかえれば，無理数が，すでに，思考の場としての実数全体の中に埋没していて，(i)による定義では無理数の定義にはならず，単に実数の集合の要素を区別しているに過ぎない。教育的配慮が，数学性，論理性を無視してよいとは思えない。(iii)は有限での思考を，そのまま無限での対象に当てはめてしまっているという点であまりにも安易である。すでに集合などの概念を通して，有限，無限の数学のちがいの意識が成長しているのである。すでに指摘したが，[5] 数直線による(iv)の実数の導入法にも，まったく問題がないわけではない。しかし，直観的ではあるが，実数のもつ数学性に結びつく方向に沿うということと，現場での実際の指導の経験から，この方法が現段階で考えられる最良のものといえよう。(ii)や(iii)の方法はこの(iv)の方法と相補なってはじめて，直観性を排除しきれないまでも，実数の本質にある程度近いものになるといえよう。

高等学校数学教育の内容に含まれる概念のほとんどすべては，実数の範囲内のそれであることを考えれば，実数構造における演算の定義可能性をもふまえて，実数の導入，構成そのものに慎重な取り組み方をしなければならないのではあるまいか。

つぎに，実数の集合のもつ位相的構造と関連する，有理数の稠密性について，(i)まったく触れていないもの，10/13，(ii)任意２つの実数の間に，少くとも１つ有理数が存在すること，としているもの，1／13，(iii) ２つの有理数の間に，少くとも１つ（したがって無数に）有理数が存在すること，としているもの，2／13，となっている。

(i)は，中学校における有理数の稠密性の指導と重複しているので省略してもよい，と考える立場をとっているか，または数学教育の段階での，有理数の稠密性のもつ役割ないしは必要性と，稠密性を導入する際の数学的厳密性との間に疑問をもつかのいずれかであろう。実際，有理数の稠密性が数学教育の場で意味をもつとすれば，それが関数の連続性，極限の概念などとの関連においてであり，微積分の指導内容に含ませるべきものであろう。数の代数構造に重点がおかれている数Iの初期の段階での指導の内容から除外することは理由のないことではない。(iii)の定義は，位相空間論で通常定義される稠密[6]の意味とは異なり，このままの定義では有理数全体の集合が連結集合をなしていても差支えない，ということになり，「有理数に対応する点だけで直線上の点全部を埋めつくすものではないことは，実数の概念構成上重要である」としている意味に沿うものではないことを指摘しておく。

代数構造のほかに，実数のこのような位相構造的見方の重視は，数学Ｉの具体的内容と必ずしも一致していない。もしここまで含めて実数概念を指導するのであれば，前述の実数の導入をも含めて，まったく新しい立場に立つ考え方が必要である。

b 実数の演算

「実数の演算についての理解を深める」ために「数学Ｉでは，中学校で学んだことを振り返り，高等学校にふさわしい程度においてこれをまとめる」というねらいを反映して，実数の間の四則演算，平方根の間の乗除の法則を主題として，指導されることになっている。四則演算の定義と，その可能性については，どの教科書にも取り上げられることはない。これは実数の導入と直接関連することであり，教育的には厳格に展開することが不可能と考えているからである。すなわち，前項の実数の導入における(i)では，実数の四則は小・中学校の数の四則の類推であり，(ii)では，無理数間，有理数と無理数の間に新たに四則を定義する必要はあるが，その教育的方法はないという理由で触れるわけにはいかない。(iii)の導入に従えば，無限小数の四則の定義が必要である。また(iv)の立場から幾何学的方法による四則の定義は可能であろう。この意味からも実数を(iv)の方法で導入することがよいといえよう。ただし，実数の演算に関する基本法則のもつ代数的性格と，それらの幾何学的説明との間の違和感は別な意味で問題となろう。

かかる事情があるために，代数構造の原点である演算の定義，その可能性は避けられてしまって，実数の演算は，実数がa priori に存在するものと考えられていると同様に，trivial な存在であって，人間が創造してゆくべき数学的対象を超えたものであるかの印象を与える指導は，本当の意味での数学教育といえるであろうか。しかも，演算の定義から論理的に導かなければならない基本法則，すなわち交換，結合，分配の諸法則を，理解さ

せるべき指導内容に位置づけていることは，どのように受けとめればよいのであろう。現代化を意識しての指導要領の改訂による歪は，このように屢々見られるのであるが，とくに実数の果たす数学教育における役割の重要性からすれば，歪のままとして放置してはなるまい。実際，各教科書では，すべて実数の演算の意味，定義を回避せざるをえないことから，形式的には次のような取り扱いをしていることもやむをえない。(i)よく知られた法則（交換，結合，分配法則）が実数で成りたつとし，平方根についての乗除の公式だけは説明しているもの,1/13,(ii)中学校で学んだ数の基本法則を並列しているだけのもの，3／13,(iii)数には上述の基本法則があるとしているもの，3／13，(iv)まったく基本法則，平方根の計算について述べていないもの，5／13，(v)平方根の計算規則のみを取り上げているもの，1／13，となっている。

実数の導入，演算の基本法則は数学教育の対象ではないとするならば，最小限，演算，基本法則を一連の公理系にもつ実数体系を前提とする，形式主義の立場をも，なんらかの形で取り入れる配慮があってほしい。「実数の演算についての理解を深める」としても，原則としては不可能である教育の対象の具体的処理を，現場教師の責任に転嫁する態度は絶対に避けなければならない。このままでは，現実には上記(iii)，(iv)のように創造から離れた，機械的指導に終始することもやむをえない。なお，「数を拡張する過程に関連して，数の集合のもつ構造に着目するなどして，数の概念の理解を深める」としているのは，形式不易の原理を指しているものと思われる。基本的には整数環の有理数体，有理数体の実数体への埋め込み(Einbetten)の概念を必要とする複雑な概念であり[7]，教育上の具体的ねらいをどこに絞るかという問題が残る。一般に数学的には重要な概念でも，指導上混乱が考えられ，数学教育において直接他との関連が薄いものは，「精選」の意味からも省略されてゆかなければなるまい。

なおつけ加えれば，実数の基本法則は，全体集合の差を除いて，小・中学校の数の計算の過程にすでに組みこまれているもので，生徒に自然定着していると考えることはできまいか。論理のない法則を用いての計算過程の分析を，あえて指導しても，どれ程の意味をもつかということも，経験上から理解しがたいことの１つである。一方，この分析が整式，有理式全体のなす代数構造，すなわち，環，体の構造につながるという見方ができるとしても，代数構造のもつ多重性と，指導の有効性のかねあいで判断すれば，これはより高次の教育の場における問題，とみなすのが自然であろう。例を挙げれば，実数の全体が可換体をなすという形式的指導のあと，

$a>0$，$b>0$のとき

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$$

の計算で，可換法則を意識しての解答をみることはできない。すなわち，具体的な文字または数字を用いた計算の中の法則は，機械的計算の中に埋まり，意識的計算の基準とはなりえない。数の集合のもつ構造について，演算，演算法則，演算の自閉性を，構造と独立させて形式的に生徒に定着させることは容易ではあるが，構造と関連させれば真の意味での定着は不可能である。その原因は，構造の理解に必要な諸概念が特殊元を用いた帰納的手段でのみ与えられ，それを一般化することが論理的にも直観的にもできないことにあるといえる。さらに，数学教育に登場する代数構造は少く，かつ類似のものであるから，逆にある構造のもつ特異性を強調することができない。いいかえれば categorical な立場に立つ以上，構造は具体物であり，その導入の意味に数学性をもたせることはできないと考える。

c　実数の大小

集合の順序構造の基礎である実数の大小関係について「高等学校にふさわしい程度」の取り扱いとして「その理解を深める」とされているが，その目的，限界は曖昧である。事実，現行の教科書での取りあげ方は，(i)数直線を用いて実数の正負を導入し，$a>b$を$a-b>0$として大小を定義しているのが，3／13，(ii)実数はその大小関係にしたがって数直線上にならんでいる，と説明の程度であるもの，1／13，(iii)正負の定義にふれないで，$a>b$を$a-b>0$で，大小関係を定義しているもの，1／13，(iv)正負，大小について一切ふれてないもの，4/13，(v)0より大きい数を正として，大小を定義するもの，1／13，(vi)実数のもつ正負の性質として，実体（real field）における順序の公理を列挙し，数直線で補っているもの，1／13，(vii)実数の大小については，次のことがらがなりたつとして，推移律，不等式と四則に関する性質を挙げたあと，これらの性質を基本性質として考察を進めていくもの，1／13，(viii)実数の集合を正，負，0の3つの部分集合に分割して，要素と，それらの3つの部分集合の間の関係として大小関係を展開してゆくもの，1／13，となっている。

(ii)は大小関係の指導を，中学校での指導で十分である

と仮定していると考えられ，無理数の部分だけを数直線で補っている意味で，(i)と(iv)の中間といえる。(iii)，(iv)はともに中学校での大小の概念を，実際には根拠としているから，正確には，無理数の関与する部分は無視してしまっている。(v)は正負の定義以前に大小関係をおいているので論理的には不合理である。(vi)，(vii)，(viii)は，抽象的に順序関係を定義する現代数学の初歩に見られる典型的手段を，比較的，なまのままでおろしたものといえる。[9] したがってこの方法による指導は，生徒に定着し難いことの他に，数学性と教育上の立場とが判別しにくく，現場での混乱をひきおこす可能性がある。このような事からも，数学を学ぶ側と，数学を背景にして教科書をつくる側との大きなへだたりを感ずる。体系の整備あるいは美化にとらわれ過ぎれば，生徒の数学への志向が挫折する可能性が大きくなることにも注意したい。

さらに，「有理数の十進小数表示からの類推によって，実数を小数表示で扱うことも考えられる」と解説されていることを受けて，実数の大小の比較を小数展開を用いて説明している教科書も見受けられるが，これはあくまで有理数の範囲に限定されるべきことを忘れている。表面的には教育的で，生徒に理解され易い方法と見られるものでも，論理的に不可能または矛盾を含むもの，あるいは数学性を根底から覆すものは排除されなければなるまい。上記の類推は数学的 analogy とはいえないからである。

d　整式・有理式

整式の導入の準備として，単項式およびその次数が定義される。これについて，(i)多変数の単項式とその次数を定義したあと，特定の変数に着目させるもの，7／13，(ii)一貫して1変数の単項式のみを扱うもの，3／13，(iii)多変数の単項式のみを扱い，特定文字には着目させないもの，2／13，(iv)多変数単項式で，特定の文字のみに着目しているもの，1／13，となっている。それぞれが理由のある教育的配慮をしての結果と考えることができるけれども，現実の指導上の難易，生徒の負担の軽重からいえば，(ii)の方法で，1変数の場合が十分理解されたあと，多変数の場合を指導するのがよいであろう。

つぎに，整式の加減乗について，すなわち，実数体上の1変数多項式環の構造の基礎をなす演算について考えて見よう。解説書では形式的な「計算面は削減，軽減の対象とする」ことになっているので，各教科書では，つぎのような取り扱いになっている。(i)整数と同様，整式の間でも加減乗が自由に行われる。その計算にあたっては，数の場合同様，交換・結合・分配の3法則が用いられる。さらに乗法では次の法則（指数法則を指す）が用いられる，と述べたあと，ただちに形式的計算の指導に入っているもの，2／13，(ii)数や式の計算は次の計算の基本法則にしたがって行われるとして，交換・結合・分配の3法則を列挙したあと，いくつかの計算例で理解させようとするもの，4／13，(iii)2つの整式に加減乗を行った結果も整式となる。これは数を計算する場合になりたつ次の3つの法則（交換・結合・分配）が式の計算においてもなりたつからである，とするもの，1／13，(iv)加減については全く述べないで，3つの基本法則と，2，3の計算例だけから指導しているものが，3／13，(v) 2つ以上の整式の加減を同類項の係数の和差に帰着させ，2つの整式の乗法は，分配法則をくり返し利用して行うとして，いくつかの例を挙げるものが，3／13，となっている。

いずれにも共通していえることは，計算の規則そのものが，整式の加減乗の定義であることを表面には出していないということである。さらに数の場合の法則と対比させながらの導入であるので，整式そのものの意味が数にまで馴化されてしまったものと見られる。整式は数とはまったく異質の，新しい，数学の対象であることと，整式という新しい対象の間の演算の意味が，この段階にきてはじめて確立される，という構造的認識を生徒にもたせようとする積極的姿勢はみられない。かかる指導法による結果，経験的には，生徒はその方法を単に記憶し，機械的な計算を行うだけである。しかも指導要領解説には「これらの指導に際しては，いたずらに計算技能の練習にはしるのではなく（中略）整式と有理式が演算に関して整数，有理数と類似の構造をもつことに着目するなど，式についての構造的な見方を深めることがたいせつである」と述べている。すなわち，実数体上の1変数多項式環，あるいは有理関数体と，有理整数環，有理数体，実数体の構造の準同型性を，前向きの姿で指導しようと試みているといえる。数学的に厳密な意味で，これを直接数学教育におろすことは，もちろん不可能である。できれば，異った2つの，数学的対象から成る構造を，代数的な意味で統合する方向を，教育的に可能な方法を通して求めることができればよいと解釈するのが妥当であろう。この意味だけに限定したとしても，なお，代数構造を，たとえば整式のつくる集合に導入するためには，少なくとも，その台となる集合が規定（erklären）されて

いなければならない。具体的には，整式そのものの定義が確定されていなければならない。一方，整式を定義するためには，それを形づくる要素(Komponente)としての文字が超越元(Transzendenz)であることを必要とする。[10] 超越性という大きな概念を教育の場で克服するのに，単に数からの，いわゆる「類推」からだけでは不可能なのである。数学教育現代化の基底には，この他にもいくつかの大きな困難が存在する。これらの概念と正面から取り組むことなしに，ただ形骸のみを追う姿はすみやかに是正されていかなければなるまい。超越元，したがって整式の概念が生きた教材として役立つものにまで成長して，はじめてこれと対蹠的な位置にある方程式の意味，方程式に含まれる文字が変数(Variable)であることも真に理解されよう。ベクトル空間における，1次独立性，あるいに関数概念における変数の概念とも深く関連することであるので，とくに文字の取り扱いには慎重に対処していかなければなるまい。

現行の指導要領，およびそれに準拠する教科書に忠実に従うかぎり，"文字"の意味は生徒にとっては，数の延長上にある，数に代わりうる記号の意味であり，数と同じように機能する"もの"と受けとめられるので，変数と超越元の区別，したがって方程式の1つの辺と，整式などの区別をつけることができない。このことは関数の相等，恒等式の概念の指導の際にもいえることである。くわしくいえば，数の演算と類似の演算を，"数を代表する文字"から構成される整式，有理式などに導入する，という形では，生徒は整式，有理式自体を"数"と考えてしまうのである。したがって，"新しい対象"である整式，有理式などの間の"新しく導入された演算"とは捉えないのが実状である。超越性の指導が何等かの意味で可能であれば，生徒にとって，それは始めて遭偶する新らしい数学の概念であり，実数から解放されたnon-categoricalな数学への糸口となるであろう。この様な方向はまた，複素数の導入，確率関数の指導などに大きな貢献をもたらすことにもなる，という意味で正しい現代化といえるのではあるまいか。

つぎに整式の因数分解を考えよう。有理整数環における約数・倍数の概念を，整数環または有理数体上の1変数多項式環へ拡張することが基本である。前記のように，整式の四則を，数の四則として受けとめてしまうので，多項式環における約数・倍数の概念は，整数のそれの数学的analogyとはなりえない。このことは両者における概念規定のための用語が同一であることにも原因があるといえよう。差支えなければ多項式環では，約元・倍元などのような区別された用語を使う方がよいのではあるまいか。これは一見「統合」の主旨に反するけれども，僅か2個の代数系の統合を目指すより，正しい代数系の理解が先行すべきであることと，単項イデアル環の段階[11]まで，かかる概念の統合は必要がないという理由からである。約数・倍数を基礎に，整式の既約性を経て因数(因子)分解の指導に入るのであるが，これについて教科書の扱いは，(i)ふつう因数分解といえば，係数が有理数の範囲で，因数がすべて既約となるまで行うとしているもの，2/13，(ii)係数および因数分解の限度については触れてないもの，10/13，(iii)因数分解では，できるだけ低い次数の因数にまで分解するのが普通であるとしながらも，係数については述べていないもの，1/13，となっている。整式の既約性が，その係数域に依存することはいうまでもないが，高等学校の数学教育においてだけではなく，整数環または有理数体上の多項式の因数分解を，有理係数の範囲内で行う数学的理由があるとしても，上記(i)については，有理係数に限定する理由が現場では指導しにくいことに対する配慮が欠けている。またすぐあとに，複素数が指導されるのであるから，(ii)，(iii)の"できるだけ低い次数"の意味が不鮮明である。さらに加えて，ほとんどの教科書で，係数域を複素数体にまで拡張した例，問題がとりあげられていることは，指導上さらに問題を複雑にしてしまっている。「いたずらに計算技能の練習にはしるのではなく，整式の因数分解が，その係数の範囲に依存していることや，整式と有理式が演算に関して整数，有理数と類似の構造をもつことに着目するためには，前述のように整式，文字などの概念の確立のほかに，複素数の指導とも関連して，いわゆる"代数学の基本定理"といわれるGaussの定理から導かれる，実係数整式の複素数体上での1次分解の可能性にまで遡る必要があろう。このことは数学教育としても可能であり，複素数体が実数体の2次拡大であるという，構造の指導への第一歩でもある。また数学Ⅲにおける有理関数の積分の指導の準備でもあるから，十分に考慮すべきであろう。

整式の除法についても，加減乗の場合と同じ考え方で指導される。除法は加減乗の組合せに過ぎないので，加減乗の指導が確立されていれば，すなわち多項式環の環構造が整備されれば問題はない。しかし多くの教科書に見られるように，除法の計算の方法を単に機械的な説明だけの指導で終るのでは，構造の理解につなげることは

できない。できれば，中学校における整数環の剰余類環の指導に準じて，多項式環の，ある多項式を法とした剰余類環の構造の指導があれば，多項式間の除法の意味が内容のあるものとなろう。最大公約数（元），最小公倍数（元）の係数の取り扱いについては，因数分解のときと同様，教科書によっていろいろの取り扱いをしている。いずれもそれなりの理由のあることではあるが，それは最大公約数，最小公倍数を導入する目的，それらを考える場としての多項式環の構造，とくに係数域の構造のとり方に依存する難しい問題がかくされているのではあるが，教育上の必要性からする，統一された扱いが望まれる。

e　分　数　式

小学校の算数教育で，整数から有理数へのつながりが問題であったと同様に,[12] 厳格にいえば，整式から有理式への移行にも概念構成上の困難が考えられる。整式間の除法と，分数式の概念はまったく異なるものとして区別されなければならないからである。整式間の除法は乗法の逆演算として把えていくのが数学的であり，また教育的にも自然である。一方分数式はそれ自体記号であり，新しい数学的対象と考えなければならない。このためには，分数式間の同値概念を用いた相等の定義がなされなければならないのであるが，曖昧な形ながらも，それが行われている教科書は，わずか1／13，だけである。なお分数式の定義の方法は次のようである。(i)A/B，$B\fallingdotseq 0$，A，Bは整式，のものであるものとするもの，　4／13，(ii)分数の形に表わされた式で，分母は文字を含む式である，とするもの，4／13，となっている。(i)では$B\fallingdotseq 0$という条件のため，すでに整式の相等の考え方が必要であり，(ii)は分数式を整式間の除法としているので，数学的には問題である。もともと，分数式はあるRelationに関する同値類の代表として定義されるものである。これを数学教育の場にそのままの形でおろすことはできないけれども，〝式〟という先入観をともない易い用語を排除して(i)の形に近いものとして導入されるべきであり，その上で分数式の間の相等をきちんと定義するだけの配慮は欲しい。演算もwell-definednessをふまえて，定義されるべきであり，形式的に与えたり，例示の形で説明されるだけの指導では不十分であろう。さらに，分数式の概念は代数構造を理解させるための，まことに好ましい教材を提供するものである。中学校における剰余系の指導を反省しつつ，類の演算がある程度指導されれば，約分，既約分数式などにまつわる不明朗さが除かれるだけでなく，ベクトル，写像，不定積分の相等や，それらの間の演算の定義なども，現在よりは遙かに数学的であり，指導しやすいものに整理できるといえよう。なおつけ加えれば，論理という指導内容に関連して，形式論理の初歩を，章を改めてわざわざ指導するものが多いけれども，整式，有理式のように具体的であり，数学的である教材に即して，数学的な見方，考え方を論理的に指導する方が，はるかに生きた数学教育であり，現代化の方向に直結していくものではないだろうか。

このように，分数式の概念のもつ数学的，教育的重要性にもかかわらず，ここでの指導は，指導要領解説，各教科書ともあまり力点をおいていないようである。また現場においても，形式的には比較的生徒になじませることができる教材であるので，軽視して扱われることが多いことも事実であるようである。しかも，形式上分数式の演算や，そのもつ性質が分数関数と非常に酷似していることは，整式と整関数との場合と同様に，数学的にはまったく異質のものを混同させる原因となるので，その取り扱い，指導に十分の注意がはらわれなければならない。

2　方程式と不等式

a　2次方程式

前項まで超越元（transcendental）としての意味をもっていた文字xが，今後は変数（variable），すなわち，ある母集合の上をsweepできるもの，その集合の要素を代表しうる記号の意味で用いられることに，まず注意させることが，ここでは本質的な条件となるのであるが，指導要領解説，各教科書とも，すくなくとも表にだして取り上げてはいない。それとは反対に，むしろ些細なことと思われる，方程式の根の名称などにこだわっている。「方程式と不等式を集合の考えで統合的にみるという観点から，解ということばを用いる」としている。元来，文字のもつ意味の区別（変数性，超越性）がなされていれば，一方からいえば，方程式，不等式は，たとえば実数全体の集合から，特定の部分集合をとり出す条件とも見られるし，他方からすれば，方程式の根は，それが随伴（adjoint）する多項式の零点（zero），すなわち，ある要素の代数性を決定する，と考える代数構造的な見方もできるわけである。どちらの見方も数学的には軽重がつけられないから，一方のみの見方に立つ考え方は，とくに初期の数学教育においては好ましくないことと考えた

い。「根」と「解」との差は，おもに習慣的なものだけと考えればよいのではあるまいか。事実教科書では，(i)解または根というが，以下根ということにする，としているもの，3／13，(ii)解または根という。以下解ということにする，としているもの，6／13，(iii)解と根とをまったく混用しているもの，1／13，(iv)根だけを用いているもの，2／13，(v)解とだけいうもの，1／13，という結果になっている。したがって，これから派生する実根，重根，虚根などの用語についてもまちまちの同意語が見られる。方程式と不等式とを集合を通して統合的にみるために，解と根とを区別する必然性があるならばともかく，上記の事実はそれに否定的な見方をする著者が少くないことを示すものであろう。たとえば，中学校数学教育で，このような形式的なことが生徒の数学能力の評価に影響をあたえていることも事実であるので，微小な問題として軽視するわけにはいかないのである。

つぎに，2次方程式の解法について，「2次方程式の指導に当たっては，中学校では完成されていないことに留意し，単に形式的解法に終始したりすることのないよう，方程式の基本的概念や解法の原理についての理解をさらに深め，論理的，総合的に考察することがたいせつである」と強調されている。ここに該当する教科書での指導は，単に2次式の標準形への変形から，根の公式を掲げるだけである。方程式の基本概念に相当する指導要領の内容が欠けているので，このような現象は当然のことといえる。ここでつけ加えておきたいことは，上記の同値変形の最終段階で，$a \fallingdotseq 0$ として

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

とするが，ここから開平して直ちに根の公式を導いてはならないということである。$b^2-4ac<0$ の場合の開平は，まだできないからである。

最後に，「方程式と不等式の指導では，解法を通じて，必要条件，十分条件など領域Dの集合・論理の指導に格好な材料を提供するところでもあるので，それとの関連を考慮しなければならない」とされている。ここでの格好な材料とは結局

$$ab=0 \Longleftrightarrow a=0 \quad \text{または} \quad b=0$$

の指導を指すものと思う。事実これをとりあげている教科書は7／13，とりあげてないものが6／13，となっている。この程度の内容では単純すぎるので，完全条件の指導の材料としては，あまり適当であるとは思えない。むしろ，「精選，現代化」の名のもとに，連立2元2次方程式の指導が削除されてしまったが，2次曲線，微積分などの指導教材としても，また完全条件の論理を指導する材料としても，連立2元2次方程式は重要な役割を果たしうるものと考えられるので非常に残念である。

b 複素数

「方程式の解が存在するように数の範囲を拡張することを理解させ，数の概念について理解を深める」ことをねらいとする複素数の導入が，2次方程式に関連して指導される。さらに「数の範囲を自然数，整数，有理数と拡張してきたのも，それぞれの解が存在するようにとの観点からであると見られることを知り，また，その拡張によってどのような性質が保存され，どのような性質が捨てられるかを知って，数の概念について理解を深める」としている。小・中学校での指導がどのようであったかをみればわかることであるが，現実には1次方程式の可解性と，数の拡張の指導とはほとんど関連をもっていなかった。負数，分数（有理数）が直観的な方法で導入されたあと，1次方程式の可解性がつけ加えられたという形であったといえる。積極的に方程式の可解性を願っての数の拡張は，これまでの段階ではなされなかった。2次方程式の可解性を軸として，複素数を導入することができるという事実と，それが教育的であるかどうかということは別の問題である。代数的見方を，ある意味で捨てれば，いいかえれば Einbetten の問題を重視しなければ，自然数→整数→有理数という拡張では，1次方程式の可解性を中心にする指導を展開することは可能であろう。あるいは形式不易の原理である演算法則の保存，大小関係の保存に触れることも可能であろう。一方現在の指導内容による複素数の導入法が，2次方程式の可解性の要求から，やむをえないものであると認めたとしても，あまりにも唐突に $x^2=-1$ の解から出発していることは，この時点で，この事実だけを形式的に生徒に受け止めさせることはできても，その意味を正しく理解させることはできない。したがって数の拡張としての意味づけにまで理想化して考えることは早計であろう。第一の理由は，これまで数の構造についての指導が強調されているということである。すなわち，いままでの数の構造は自閉的な概念であり，これを構造の拡張にまで結びつけるためには，同値性，類演算，埋め込みなどの複雑な論理が数学的には不可欠のものであるからである。第二の理由として，有理数→実数の拡張段階では，これが代数拡大

(algebraic-extension) でないため，何等かの意味で連続の概念を必要とするので，方程式の可解性などという簡単な手段だけでは，拡張を完成することはできない。方程式の解になりえない実数，すなわち超越数 (trans-cendental numbers) の濃度 (cardinality)が，方程式の解になりうる実数，すなわち代数的数 (algebraic num - bers) の濃度と比較にならないものである，という事実も考えれば，方程式の可解性と，数の拡張との関係を強調し過ぎては危険であろう。ここでは複素数体が実数体の2次拡大である数学的事実を，十分教育的配慮のもとに指導する程度に目標を絞った方が，よい結果がえられるであろう。

実際，各教科書での複素数の導入はつぎのようになっている。(i) $x^2+1=0$ の根として i を導入し，記号 $a+bi$ をあたかも a, b, i が数である，として扱って，相等，四則を定義しているもの，6/13，(ii) i の導入後，$a+bi$ を $a+bx$ と同じに考えて計算し，随所で i^2 を -1 におきかえさせるもの，5/13，(iii) i の導入後，相等を定義しないまま，四則を展開するもの，1/13，(iv) i の導入後，i を含む式の計算規則を述べ，その上で，相等，四則の法則は証明すべきもの，と指導するもの，1/13，である。

始めて複素数を学ぶ生徒にとって，i が $x^2+1=0$ の根であることの意味が曖昧であることが大きな問題である。いままで x は実数を想定した変数として指導され，構造が実数の数学の自閉性を中心に指導されているからである。また $a+bi$ をはじめから式と見させることは論理的にも，教育的にも問題がある。式と見ることができるためには，すでに複素数が定義され，その間の四則が確立されていなければならないし，教育的には，i の意味が不明なまま，その後の四則などは，まったく形式的，機械的に暗記するのみである。複素数の本質から離れた形式的な練習問題を，比較的生徒がよく解けることと，複素数が生徒によく理解されるかということとを混同してはならない。いままでの数学の対象と異り，複素数は具体的背景をもちにくいので，生徒からすれば，あくまで"虚数"であり，方程式の根としても理解しうる実質的なものに位置づけることはできない。このことは2次関数のグラフの指導の際にも同様に問題となる。

複素数の導入により，2次方程式の根の公式を一応は数学的にまとめた形にすることはできても，本質が把えられないまま，形式だけをあたえる，このような内容は，数学教育にどのような意味をもちうるものであろうか。さらに高等学校の数学教育で，複素数がほとんど登場しない事実を考えれば，かかる内容は削除しても，さして大きな損失はなく，むしろ数学的に非常に重要な複素数の概念は，無傷のまま，ある時期の指導をまった方がよくはないだろうか。仮に，どうしても高等学校の数学教育に，複素数の概念を入れなければならないとすれば，文字の場合と同様，生徒の日常の経験の外にある複素数を，せめて直観的見通しの立てやすい平面をモデル (これは意識的に削除されている) にして，直接，数や方程式に結びつけないで，まったく形式的に導入した方が，数の拡張の考えからしてもよいのではあるまいか。すなわち，数学Iで導入される集合の直積の概念を用いて複素数を導入すれば，不自然であった $i^2=-1$ も，記号 $a+bi$ の意味も自然な形で生徒に理解しうるものとなろう。なお，この方法はベクトルの指導にも役立てることができよう。

実数から複素数への拡張で「失われる性質」である順序構造は，代数構造と深くかかわる概念である。仮りに方程式の可解性を根拠に，代数的な見方から複素数が導入され，四則演算までの指導が満足できるものであるとしても，なお大小関係の指導に問題が残る。大小関係の指導を教科書でみると，(i)理由をつけないまま，実数と虚数の間，虚数どうしの間の大小は考えないとするもの，7/13，(ii)不等式を扱う場合には，文字はすべて実数とするもの，1/13，(iii)複素数の間の大小を考えることはできない，とだけ述べているもの，1/13，(iv)複素数の大小関係にまったく触れてないもの，2/13，(v)理由をつけて大小関係は入れられない，としているもの，2/13，となっている。

もし順序構造の指導をも重視するのであれば，2つの異なる構造の間の結びつき，順序構造の拡張の理論にまで踏みこんで，教育的に配慮されなければなるまい。そうでない限り，いくつかの事実の羅列だけに終ってしまうであろう。さらに注意すべきことは，複素数の集合に大小がつけられないのではなく，実数の順序の拡張である順序を複素数に入れることができないことを明示する必要がある。

あとがき

新指導要領による高等学校数学教育の数学Iの導入部について考察したわけであるが，この導入部は高等学校数学教育全体の基盤をなすことは，いうまでもないことである。a priori に存在するものの考察から，人間が自

由に創造すべき対象についての考察に変換することこそ，真の意味の数学教育の現代化と解釈する立場からすれば，現段階での指導要領は卒直にいって，極めて不備なものといわざるをえない。現代化の具体的な方法を発見することが困難であるとしても，放置しておいてよいものではない。classicalな数学教育の教材を用いての現代化は不可能であるという見方もできるのであるが，[13] 少くとも現代化の根底には，旧いものをまったく捨てた，あらたな考え方が要求されるであろう。現代化の場の中に取り組まないで，従来の数学教育の流れの中に，現代化の教材を投げいれただけでは，どうしても上で指摘して来たような問題は避けられない。また実数をモデルにとってのcategoricalな方法による限り，形式化，抽象化は未熟なものにならざるをえない。形式化，抽象化が，統合であり，一般であるためには，つねに具体への還元が用意されなければならない。具体 ⇄ 抽象という関係の中にのみ教育における数学性を索めることができるのではあるまいか。今回の改訂には，実数，2次方程式の教材で見るかぎりnon-categoricalへの指向はなく，現代化の理想を現実化する具体的方法を，用意することができないまま，その虚像を追っているといえば過言であろうか。

注および参考文献

1)( ) 佐藤・宮田，算数教育の問題点，茨城大学教育学部教育研究所紀要，3，1970

( ) 佐藤・宮田，算数教育の問題点(II)，茨城大学教育学部紀要，21，1971

( ) 佐藤・宮田，算数教育の問題点(III)，茨城大学教育学部教育研究所紀要，4，1971

( ) 佐藤・宮田，中学校数学教育の問題点(I)，茨城大学教育学部紀要，22，1972

( ) 佐藤・宮田，中学校数学教育の問題点(II)，茨城大学教育学部教育研究所紀要，5，1972

( ) 佐藤・宮田，中学校数学教育の問題点(III)，茨城大学教育学部紀要，23，1973

( ) 佐藤・宮田，中学校数学教育の問題点(IV)，茨城大学教育学部教育研究所紀要，6，1973

2) 高等学校指導要領解説，文部省，1972

3) 宮田，数学教育の現代化，茨城大学教育学部紀要，19，1969

4) 小平邦彦，数学I（東京書籍，昭和49年）
伊関兼四郎 他，新数学I（数研出版，昭和49年）
矢野健太郎，数学I（学研書籍）
正田建次郎 他，数学I（啓林館，昭和48年）
〃 ，新数学I（ 〃 ）
守屋美賀雄 他，新数学I（帝国書院）
小松勇作，数学I（旺文社，昭和48年）
鍋島信太郎 他，数学I（池田書店，昭和49年）
寺田文行 他，数学I（大日本図書）
小林善一，数学I（教育出版）
福原満洲雄 他，新数学I（実教出版，昭和49年）
大槻富之助 他，数学I（日本書院）
吉田洋一 他，数学I（学校図書，昭和49年）

5) 上記 1)の(V)

6) たとえばJ. L. Kelley;General Topology（Van Nostrand, 1955), N. Bourbaki;Elements de mathematique, Livre III, Topologie generale (Hermann).

7) 埋め込みの概念については，たとえばN. Jacobson; Lectures in Abstract Algebra, Vol I, III (Van Nostrand, 1965, 1963), B. L. van der Waerden; Algebra I, II (Springer, 1955).

8) 実体については，たとえば，宮田；体論入門（槇書店，1973), O. F. G. Schilling; The Theory of Valuations (A. M. S., 1950).

9) 順序関係については，たとえば，彌永・小平；現代数学概説（岩波，1973).

10) 多項式の概念については，上記 7)

11) 単項イデアル環の理論については，宮田；環論入門（槇書店，1969), B. Huppert; Endliche Gruppen I (Springer, 1967), O. Zariski, P. Samuel; Commutative Algebra, Vol I, II (Van Nostrand, 1958, 1960).

12) 上記 1)の( )

13) 上記 3)

Problems in Mathematics Teaching in Upper Secondary School Education (Ⅰ)

Tatsuo Miyata and Kazuko Miyata

Abstract

"The Revised Course of Study" raised many questions in mathematics teaching in upper secondary school educations. The purpose of this study is to survey and consider the contents of the teaching materials particularly in the theory of real numbers, equations and inequalities.